

問題3. 2

層流における3乗平均速度 $\langle u^3 \rangle$ は $2U^3$ ($U = 1/2 u_{\max}$: 平均速度)であることを示せ。

$$\langle u^3 \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u^3 2\pi r dr \quad \text{とある。}$$

(これを、愚直に解いてみる)

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left[\frac{4P \cdot R^2}{4L\mu} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\} \right]^3 \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{2\pi}{\pi R^2} \cdot \left(\frac{4P \cdot R^2}{4L\mu} \right)^3 \int_0^R \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}^3 r dr \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで} \int_0^R \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right\}^3 r dr$$

$$= \int_0^R \left(r - 2r \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^5}{R^4} - \frac{r^3}{R^2} + 2\frac{r^5}{R^4} - \frac{r^7}{R^6} \right) dr$$

$$= \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R - \left[\frac{2}{4R^2} r^4 \right]_0^R + \left[\frac{r^6}{6R^4} \right]_0^R - \left[\frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R + \left[2 \cdot \frac{r^6}{6R^4} \right]_0^R - \left[\frac{r^8}{8R^6} \right]_0^R$$

$$= \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{6} R^2 - \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{3} R^2 - \frac{1}{8} R^2$$

$$= \frac{1}{8} R^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②より

$$\langle u^3 \rangle = \frac{2\pi}{\pi R^2} \cdot \frac{4P^3 \cdot R^6}{64L^3\mu^3} \cdot \frac{1}{8} R^2$$

$$= 2 \left(\frac{4P}{8L\mu} R^2 \right)^3$$

$$\text{平均速度 } U = \frac{4P}{8L\mu} R^2 \text{ なので (課題1.3を参照のこと)}$$

$$\langle u^3 \rangle = 2U^3 \text{ である。}$$

($U_{\max} = 2U$ を利用して
より解くのも可)